13.1 泰勒级数

13.1.1 泰勒级数

13.1.2 求解析函数的泰勒展式

上一节我们知道幂级数的和函数在收敛圆内是解析的，现在我们研究与此相反的问题，就是一个解析函数是否可以表示成幂级数.

13.1.1 泰勒级数

定理 13.1.1 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $z_0 \in D$

R 为 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离,

则当 $|z-z_0|<R$ 时

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

其中 $c_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(z_0),\quad n=0,\ 1,\ \cdots$

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ 称为 $f(z)$ 在 z_0 的泰勒级数,

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ 称为 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 的泰勒展开式.

13.1.2 求解析函数的泰勒展式

利用泰勒级数可把解析函数展开成$z-z_0$的幂级数，这样的展开式是否唯一？

结论：

解析函数$f(z)$在$z=z_0$处的幂级数表达式唯一.

设$f(z)$在z_0处的展开式为

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots$$

则$a_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n=0,\ 1,\ 2,\cdots$

例 1 求$f(z)=e^z$在$z=0$处的泰勒级数.

解：因$f^{(n)}(z)=e^z$，故$f^{(n)}(0)=1$，于是

$$c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{1}{n!},\quad n=0,1,\cdots$$

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$$

因为e^z在复平面内处处解析，

所以上式在复平面内处处成立，

即上述级数的收敛半径为$R=+\infty$.

用类似的方法可得:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad |z| < +\infty.$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad |z| < +\infty.$$

由于解析函数$f(z)$在z_0处的幂级数表达式唯一，

因此我们不仅可通过计算$c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$，

来求 $f(z)$在z_0处的幂级数表达式，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

也可利用幂级数的代数运算、分析运算等性质

来求$f(z)$的相应幂级数展开式.

例 2 求$f(z)=\dfrac{1}{z^2+3z+2}$在$z=1$处的泰勒级数.

解: $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+2)}=\dfrac{1}{z+1}-\dfrac{1}{z+2}$

由幂级数的代换运算性质可得

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{2+(z-1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}},$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\quad |z|<1$$

$$\left|\frac{z-1}{2}\right|<1$$

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+2)}=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}$$

$$\frac{1}{z+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}, \quad \left|\frac{z-1}{2}\right|<1$$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{3+(z-1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{3^{n+1}},$$

$$\left|\frac{z-1}{3}\right|<1$$

因此

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(z-1)^n, \quad |z-1|<2$$

例 3 将$f(z)=\ln(1+z)$展成z的幂级数.

解：在复平面内，除$z=-1$及其左边负实轴上的点外，$\ln(1+z)$是解析的，而$z=-1$是它距$z_0=0$最近的一个奇点，所以它在$|z|<1$内可以展开成z的幂级数：

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\ |z|<1$$

在圆域$|z|<1$内作一条从0到z的曲线C，上式两端沿曲线C逐项积分，得 $\int_0^z \frac{1}{1+z}dz=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z(-1)^n z^n dz,$

$$\ln(1+z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1},\ |z|<1$$

$f(z)$在$|z-z_0|<R$内解析 $\Leftrightarrow$ $f(z)$在$|z-z_0|<R$内

可展开成幂级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

$f(z)$在区域D内解析$\Leftrightarrow$ $f(z)$在D内每一点均可展为泰勒级数

这一性质反映了解析函数与幂级数的密切关系.